12. # KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL

Úvod & Motivace

Křivkový a plošný integrál nejsou nové typy integrálů jako byly (novou) Riemannův, Newtonův či Lebesgueův integrál. Nepůjde nám o konstrukci, ale o pochopení jak využít Lebesgueův integrál k výpočtu integrálu na křivkách, plochách či jejich zobecněních: k-plochách v d-rozměrném prostoru, $d \in \mathbb{N}$ a $1 \leq k \leq d$. (Je-li $k = d$, pak se jedná o (pro nás již známý) Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^d$.)

Je-li $\boxed{k=1}$ mluvíme o křivkovém integrálu, neboť 1-rozměrné objekty v $\mathbb{R}^d$ jsou křivky (trajektorie).

Křivkou rozumíme zobrazení z intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^d$. Budeme uvažovat křivky, které zobrazují (a,b) na svůj obraz značený $\langle \varphi \rangle$ prostě a které jsou třídy C^1. Tzn.

$$\varphi : (a,b) \xrightarrow{\text{na}} \langle \varphi \rangle \subset \mathbb{R}^d \quad \text{a} \quad \varphi'(t) \text{ existuje } \forall t \in (a,b)$$
$$\text{a} \quad \varphi' \in C((a,b)) \Rightarrow \varphi \in C^1((a,b))$$
$$\text{a} \quad \varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a,b).$$

(viz příklad na str. 3)

Rozlišujeme 2 významné třídy křivkových integrálů:

[1] **KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 1. DRUHU**

značíme $\displaystyle\int_{\langle \varphi \rangle} f \, ds$ kde f skalár

Význam: $f \equiv 1 \Rightarrow$ délka křivky

$f = \varrho$ hustota $\Rightarrow$ hmotnost "drátku" popsaného křivkou $\langle \varphi \rangle$ s hustotou ϱ.

---

[2] **KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 2. DRUHU**

značíme $\displaystyle\int_{\langle \varphi \rangle} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_{\langle \varphi \rangle} \vec{f} \cdot \vec{t} \, ds$

kde $\vec{f}$ vektorová funkce

$\vec{ds} = \vec{t} \, ds$

$\vec{t}$ tečný vektor podél $\langle \varphi \rangle$

Význam: práce potřebná k překonání síly $\vec{f}$ působící proti pohybu podél $\langle \varphi \rangle$ (na hmotný bod pohybující se)

Otázka Jak křivkové integrály počítat ?

Odpověď: Motivováni vzorečkem (odvození vzorečku) pro délku křivky:

1. DRUHU

$$\int_{\langle\varphi\rangle} 1\, ds = \int_a^b \sqrt{[\varphi_1'(t)]^2 + \dots + [\varphi_d'(t)]^2}\,dt = \int_a^b |\varphi'(t)|_2\,dt$$

$\varphi : [a,b) \to \mathbb{R}^d$

$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t))$

kde poslední integrál je JEDNOROZMĚRNÝ (Lebesgueův či Riemannův) integrál na (a,b),

zavedeme,

pro skalární f definovanou na otevřené množině obsahující $\langle\varphi\rangle$ vztah

$$\int_{\langle\varphi\rangle} f\,ds \left(= \int_{\langle\varphi\rangle} f(\overset{x_1,\dots,x_d}{\vec{s}})\,ds\right) \overset{df}{=} \int_a^b f(\vec{\varphi}(t))\,\|\vec{\varphi}'(t)\|_2\,dt$$

2. DRUHU Je-li $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^d$, pak $\vec{t} = \dfrac{\vec{\varphi}'(t)}{\|\varphi'(t)\|_2}$ (tečný vektor ke $\langle\vec\varphi\rangle$ v $\vec{\varphi}(t)$) a tak

$$\boxed{\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{ds}} = \int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{t}\,ds = \int_a^b \vec{f}(\vec{\varphi}(t))\cdot\frac{\vec{\varphi}'(t)}{\|\vec{\varphi}'(t)\|_2}\,|\vec{\varphi}'(t)|_2\,dt$$

$$= \boxed{\int_a^b \vec{f}(\vec{\varphi}(t))\cdot\vec{\varphi}'(t)\,dt}$$

Všimněme si, že ⓐ z pohledu d-rozměrného (Lebesgueova) integrálu integrujeme, pro $d \geq 2$, přes křivky, které mají d-rozměrnou Lebesgueovu míru rovnou 0.

ⓑ Stejnou křivku mohu popsat různými parametrizacemi

např. • $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ pro $t \in (-\pi,\pi)$ nebo $t \in (0,4\pi)$

$\Rightarrow \varphi'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$

• $\varphi(t) = (\cos t^2, \sin t^2) \quad t \in (-\pi,\pi)$

$\Rightarrow \varphi'(t) = (-2t\sin t^2, 2t\cos t^2) \neq 0 \iff t \neq 0.$

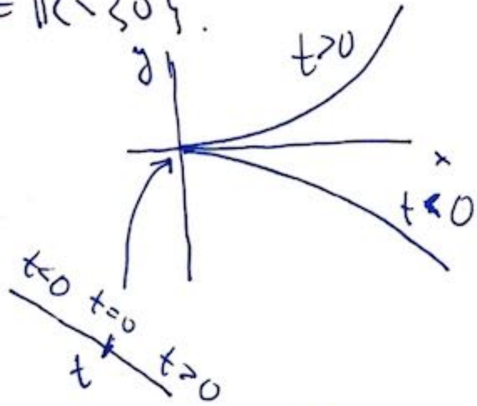
Vždy popisuje φ kružnici $\partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, v prvním případě $\vec{\varphi}'(t) \neq 0$ vždy ale φ není prosté pro intervaly větší než $(0,2\pi)$.

V druhém případě se v $t=0$ mění směr pohybu a pohybuji se po křivce nazpátek.

Pozor $\vec{\varphi}(t) = (t^2, t^3)$ nepopisuje hladkou křivku. Všimni:

- $\vec{\varphi}'(t) = (2t, 3t^2) = (0,0) \Rightarrow \vec{\varphi}'(t) \neq 0$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $x = t^2,\ y = t^3$ a $t > 0$ $\quad y = x^{3/2}$

  $x = t^2,\ y = t^3$ a $t < 0$ $\quad y = -x^{3/2}$



Q: • Není jasné, zda takto definované integrály nezávisí na parametrizaci – to by byl nežádoucí efekt.

• Je třeba ověřovat podmínku $\vec{\varphi}'(t) \neq 0$ a požadovat, aby φ bylo na (a,b) prosté (jinak musel počítat vícenásobné oběhnutí).

▷ Je-li $\boxed{k=2}$ mluvíme o plošném integrálu, neboť 2-rozměrné objekty v $\mathbb{R}^d$ (speciálně v $\mathbb{R}^3$, tzn. $d=3$) jsou plochy.

Motivováni popisem kulové a válcové plochy (sférické a cylindrické souřadnice) a diskusí ohledně křivek definujeme

Jednoduchou plochu φ jako prosté zobrazení intervalu $\overbrace{(a,b)\times(\alpha,\beta)}^{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ na obraz $\varphi(\Omega)$ takové, že $D\varphi$ existuje $\forall (u,v) \in \Omega$ a

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$ má v Ω hodnost 2

Př. $\begin{cases} \varphi_1 : (\rho, \alpha) \mapsto (\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha, \sqrt{1-\rho^2}) & \text{kde } \rho \in (0,1),\ \alpha \in (0, 2\pi) \\ \varphi_2 : (\psi, \varphi) \mapsto (\cos\psi\sin\varphi, \sin\psi\sin\varphi, \cos\psi) & \text{kde } \psi \in (0, 2\pi),\ \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$

popisují severní polosféru.

Máme tedy 2 různé parametrizace (φ_1 resp. φ_2) stejné jednoduché plochy v $\mathbb{R}^3$.

Opět rozlišujeme dva druhy plošných integrálů:

[1] PLOŠNÝ INTEGRÁL 1. DRUHU

značíme $\int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} f \, dS$ kde f je skalár

význam: $f = 1$ • obsah plochy $\langle\varphi(\Omega)\rangle$

$f = \varrho$ • hmotnost plochy

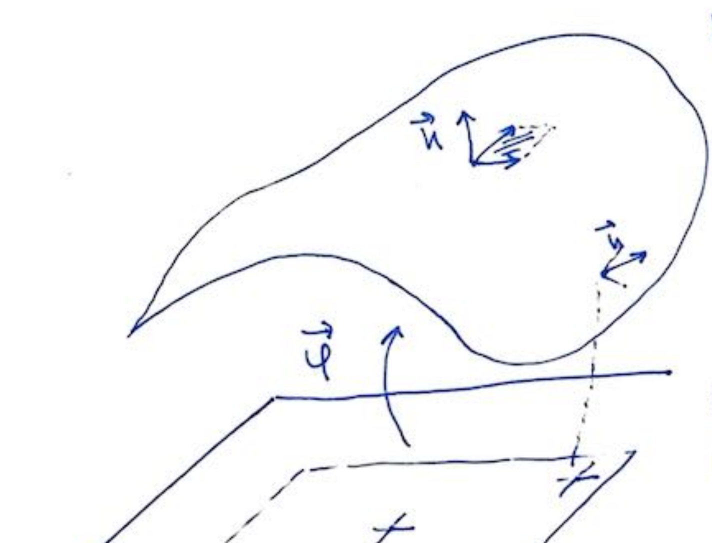
[2] PLOŠNÝ INTEGRÁL 2. DRUHU

značíme $\int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} \vec{f} \cdot d\vec{S}$ kde $\vec{f}$ je vektorová fce z $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$$= \int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS$$

význam: tok veličiny $\vec{f}$ (např. tepla, je-li $\vec{f}$ tepelný tok) přes plochu $\langle\varphi(\Omega)\rangle$

Otázka: Jak plošné integrály počítat?



tečná nadprostor je určen v daném bodě vektory

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\right)$$

a

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v} = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\right)$$

$\mathbb{R}^2$ Normálový vektor $\vec{n}$ je pak dán (až na násobek) jako vektorový součin

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}$$

tedy: $\vec{n} = \left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right) \Big/ \left|\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right|$

"Motivace":

$$\int_{\varphi(\Omega)} dS = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla Z|^2} = \int_{\Omega} \quad du\,dv \qquad \text{OBSAH PLOCHY}$$

Parametrizace v případě, když plocha je dána jako graf fce

$$\vec{\varphi}: \underset{\mathbb{R}^2}{(u,v)} \mapsto \underset{\mathbb{R}^3}{(u,v,z(u,v))} \Rightarrow \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \left(-\frac{\partial z}{\partial u}, -\frac{\partial z}{\partial v}, 1\right)$$

Tedy

$\boxed{\text{1. DRUHU}}$ $$\int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} f\,dS \overset{df}{=} \int_{\Omega} f(\vec{\varphi}(u,v))\,\left\| \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v} \right\|_2 du\,dv$$

$\boxed{\text{2. DRUHU}}$ $$\int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} \vec{f}\cdot\vec{dS} = \int_{\langle\varphi(\Omega)\rangle} \vec{f}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{\Omega} \vec{f}(\vec{\varphi}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right) du\,dv$$

OTÁZKA: Jak bychom počítali 3-plochy v $\mathbb{R}^4$?

$\triangleright$ Existuje, a to i v dimenzi 3, několik vět a vzorečků, které spojují objemové, plošné a křivkové integrály:

- Věta o potenciálu,
- Greenova věta,
- Gaussova nebo Gauss-Ostrogradského věta,
- Stokesova věta,

které jsou zobecněními 1-rozměrného Newtonova vzorečku

$$(\square)\qquad \boxed{\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

$\boxed{\text{Věta o potenciálu}}$ souvisí s křivkovým integrálem 2. druhu a je úzce spojená s $(\square)$ a s existencí potenciálu U k vektorovému poli $\vec{f}$. Za této situace:

$$\begin{aligned}\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{ds} &= \int_a^b \nabla U(\vec{\varphi}(t))\cdot\vec{\varphi}'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} U(\vec{\varphi}(t))\,dt \\ &= U(\vec{\varphi}(b)) - U(\vec{\varphi}(a)).\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Greenova věta}}$ se týká $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a její hranice $\partial\Omega$, která tvoří jednoduchou uzavřenou křivku v $\mathbb{R}^2$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{tj. } \varphi:(a,b)\to\mathbb{R}^2, \quad \varphi(a)=\varphi(b) \\ \varphi'(t)\neq 0 \ \forall t\in(a,b) \end{array}\right]$$

Pak
$$\int_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{dS} = \int_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)}_{\text{curl } \vec{f}} dx\,dy$$

curl $\vec{f}$ ve dvou dimenzích je skalár

integrál 2. druhu

$\boxed{\text{Stokesova věta}}$ - se týká plochy $G \subset \mathbb{R}^3$ a její hranice ∂G, která vytváří uzavřenou křivku v $\mathbb{R}^3$

Platí:

$$\boxed{\int_{\partial G} \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_{G} \underbrace{\text{curl}\,\vec{F}}_{\text{vektor}}\cdot\vec{dS}}$$

$$\int_{\partial G} \vec{F}\cdot\vec{t}\,ds \qquad \int_{G} \text{curl}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

$\boxed{\text{Gaussova věta}}$ se týká $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a její hranice $\partial\Omega$, která představuje plochu v $\mathbb{R}^3$. Typický příklad je $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ a $\partial\Omega = \partial B_1(0)$.

Platí:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{dS} = \int_{\Omega} \text{div}\,\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

neboli

$$\boxed{\int_{\Omega} \text{div}\,\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS}$$

Otázka: Dají se všechny tyto věty / formule nahlédnout jako důsledek jediného vzorce? Ano. $\int_{\partial\Omega} F = \int_{\Omega} dF$ v jazyce diferenciálních forem.

Křivkový a plošný integrál – část 2

V této přednášce si nejdříve zavedeme definice různých typů křivek. Pro regulární po částech C^1-křivky pak nadefinujeme (zopakujeme) definice křivkových integrálů 1. a 2. druhu, spočítáme dva příklady a zformulujeme a dokážeme tvrzení o nezávislosti těchto integrálů na volbě parametrizace (modulo znaménka u křivkového integrálu 2. druhu). Na závěr zformulujeme a dokážeme tzv. větu o potenciálu.

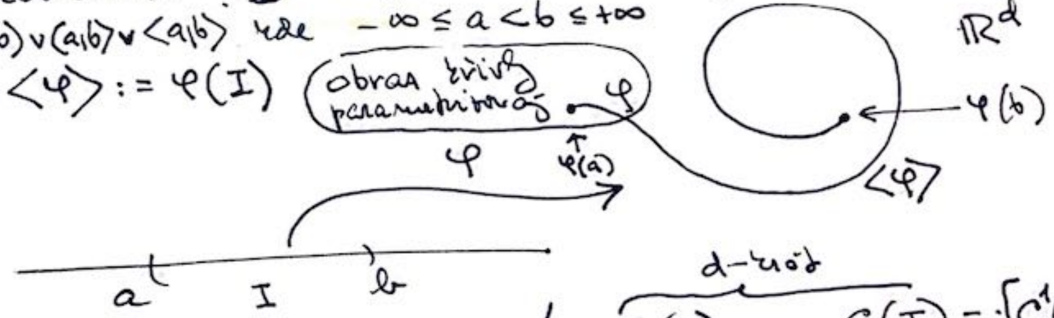
Křivky v $\mathbb{R}^d$

Zavedení a vyjasnění různých pojmů.

- **Křivka**: zobrazení $I \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^d$, tj. $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$

  $I = (a,b) \vee \langle a,b) \vee (a,b\rangle \vee \langle a,b\rangle$ kde $-\infty \le a < b \le +\infty$

  $\langle \varphi \rangle := \varphi(I)$ obraz křivky parametrizovaný φ



- **C^1-křivka**: $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ tak, že $\varphi' \in \overbrace{C(I) \times \dots \times C(I)}^{d\text{-krát}} =: [C^1(I)]^d$ (křivka třídy C^1)

  φ_1', φ_2'

  přičemž máme na mysli jednostranných derivací (existenci) pokud krajní body I do I patří.

- **Po částech C^1-křivka**: $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ taková, že existuje KONEČNÉ $\{I_j\}_{j=1}^m$ tak, že $I = \bigcup_{j=1}^m I_j$ přičemž vnitřky I_j jsou navzájem disjunktní a sousední intervaly obsahují společný dělicí bod a $\varphi \in [C^1(I_j)]^d$

  (tzn. v krajních bodech I_j existují vlastní jednostranné derivace, uvnitř intervalů je derivace spojitá)

- **Regulární křivka**: po částech C^1-křivka splňující $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t \in I = \bigcup_{j=1}^m I_j$ (s výjimkou krajních bodů intervalů I_j, $j = 1, \dots, m$)

Pro regulární křivky nadefinujeme křivkový integrál. Uvedeme si ještě tři užitečné definice křivek:

- **Jednoduchá křivka**: Spojitá křivka (tzn. $\varphi \in C(I)$) taková, že

  (a) φ^{-1} je spojitá na $\varphi((a,b))$

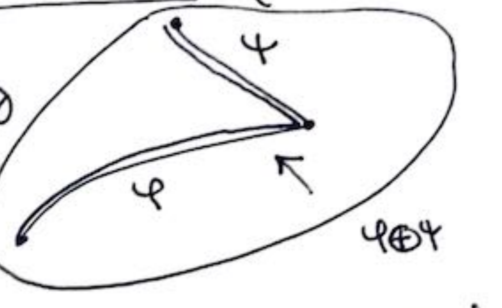
  (b) Buď φ je prostá na I Nebo $I = \langle a,b\rangle$ a φ je prostá na $\langle a,b)$ i na $(a,b\rangle$

  polouzavřené intervaly

- **Uzavřená křivka**: $\varphi : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá a $\boxed{\varphi(a) = \varphi(b)}$

- **Jordanova křivka**: jednoduchá uzavřená křivka

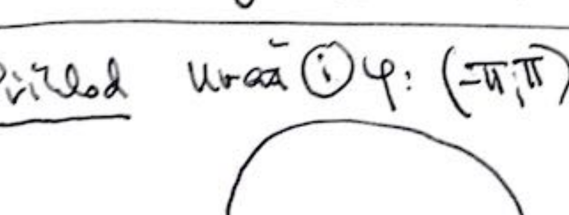
Def. • φ, ψ křivky, pak $\varphi \oplus \psi$ je součet křivek (viz obrázek)



např. v definici po částech C^1-křivky máme $\varphi = \bigoplus_{j=1}^{m} \varphi_j$, kde $\varphi_j := \varphi|_{I_j}$

- Je-li $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^d$, pak $\ominus\varphi : (-b,-a) \to \mathbb{R}^d$ dané předpisem $\ominus\varphi(t) = \varphi(-t) \ \forall t \in (-b,-a)$ je křivka opačná k φ.

Příklad Uvaž (i) $\varphi : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2$ def. $\varphi(t) = \begin{cases} (t+1, 0) & t \in (-\pi, 0\rangle \\ (\cos t, \sin t) & t \in \langle 0, \pi) \end{cases}$



$\boxed{\text{Vlastnosti } \varphi}$: • φ po částech C^1, spojitá na $(-\pi,\pi)$.

- φ je regulární, neboť $\varphi'(t) = \begin{cases} (1,0) & \text{na } (-\pi,0) \\ (-\sin t, \cos t) & \text{na } (0,\pi) \end{cases}$
- $\varphi'(t)$ je tečný vektor (jednotkový) v $(-\pi,0) \cup (0,\pi)$, v $t=0$ tečný vektor neexistuje

- φ je regulární

v $t=0$ existuje derivace zprava/zleva

- φ je prostá: $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$
- φ <u>NENÍ</u> JEDNODUCHÁ, neboť φ^{-1} není spojitá na $\varphi((-\pi,\pi))$ v okolí $(-1,0)$ které padá do $\varphi((-\pi,\pi))$ (pro $t=-2$).

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \delta \Rightarrow |t_1 - t_2| < \varepsilon$

ale v okolí $(-1,0)$ leží body tak, že $|t_1 - t_2| > 1$

(ii) Def. $\psi : (-2,\pi) \to \mathbb{R}^2$ předpisem $\psi(t) = \begin{cases} (t+1, 0) & t \in \langle -2, 0) \\ (\cos t, \sin t) & t \in \langle 0, \pi) \end{cases}$

pak ψ má stejné vlastnosti jako φ a navíc ψ je jednoduchá neboť na $\langle -2,\pi)$ je ψ prostá, na $\langle -2,\pi\rangle$ je ψ dále prostá a ψ^{-1} je spojitá na $\psi((-2,\pi))$, neboť nepřidáme bod $(-1,0)$ do tohoto obrazu nepadá.

Navíc ψ je uzavřená a tedy ψ je Jordanova.

Def Buď $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^d$ regulární křivka. Pak definujeme pro $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$\int_{\langle\varphi\rangle} f\,ds = \int_a^b f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt$$ pokud integrál vpravo existuje.

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 1. DRUHU

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{a_j}^{b_j} f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt$$

$$\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_{\langle\varphi\rangle} f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \dots + f_d\,dx_d$$

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 2. DRUHU

$$\stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \vec{f} \cdot \vec{t}\,ds$$

$$= \int_a^b \vec{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$ pokud integrál vpravo existuje (jako Lebesgueův, Riemannův či Newtonův)

Nyní prozkoumáme závislost křivkových integrálů na změně orientace dané parametrizace

- Křivkový $\int$ II. DRUHU

$$\int_{\langle \ominus\varphi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{ds} \overset{\text{df.}}{=} \int_{-\beta}^{-\alpha} \vec{f}(\ominus\varphi(t))\cdot \underbrace{(\ominus\varphi)'(t)}_{\frac{d}{dt}(\ominus\varphi)(t)}\, dt$$

definice opačné křivky
$$= \int_{-\beta}^{-\alpha} \vec{f}(\varphi(-t))\cdot \frac{d}{dt}(\varphi)(-t)\, dt$$

řetízkové pravidlo
$$= -\int_{-\beta}^{-\alpha} \vec{f}(\varphi(-t))\cdot \frac{d\varphi}{d(-t)}(-t)\, dt$$

substituce
$$\underset{\tau=-t}{=} \int_{\beta}^{\alpha} \vec{f}(\varphi(\tau))\, \varphi'(\tau)\, d\tau$$

záměna mezí v integrálu
$$= -\int_{\alpha}^{\beta} \vec{f}(\varphi(\tau))\, \varphi'(\tau)\, d\tau$$

$$= -\int_{\langle\varphi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{ds}$$

- Křivkový integrál I. DRUHU $\quad \displaystyle\int_{\langle\ominus\varphi\rangle} f\,ds = \int_{\langle\varphi\rangle} f\,ds$

Příklady (1) $\int_{\langle\varphi\rangle} (x^2+y)\,ds$ kde $\varphi(t)=(1-t,1+t)$ $t\in[0,1]$

Řešení: Jde o integrál 1. druhu. Křivka je C^1-křivka, $\varphi'(t)=(-1,1)$ je nenulové v $(0,1)$. Tedy φ je regulární křivka. Navíc

$|\varphi'(t)| = \sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2} = \sqrt{2}$. Dle definice

$$\int_{\langle\varphi\rangle}(x^2+y)\,ds = \int_0^1\left((1-t)^2+(1+t)\right)\sqrt{2}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 (2-t+t^2)\,dt = \sqrt{2}\left[2t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{11\sqrt{2}}{6}}}$$

(2) $\int_{\langle\varphi\rangle} x\,dx - y\,dy = \int_{\langle\varphi\rangle} \underbrace{(x,-y)}_{\vec{f}(x,y)}\cdot\underbrace{(dx,dy)}_{\vec{ds}}\,ds$ ← Integrál II. druhu

kde $\varphi(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in(0,\pi)$

$$= \int_0^\pi (\cos t,-\sin t)\cdot(-\sin t,\cos t)\,dt$$

$$= -2\int_0^\pi \cos t\sin t\,dt = \left\{\begin{matrix}\left[\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^\pi \\ \left[\frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^\pi\end{matrix}\right\} = \underline{\underline{0}}$$

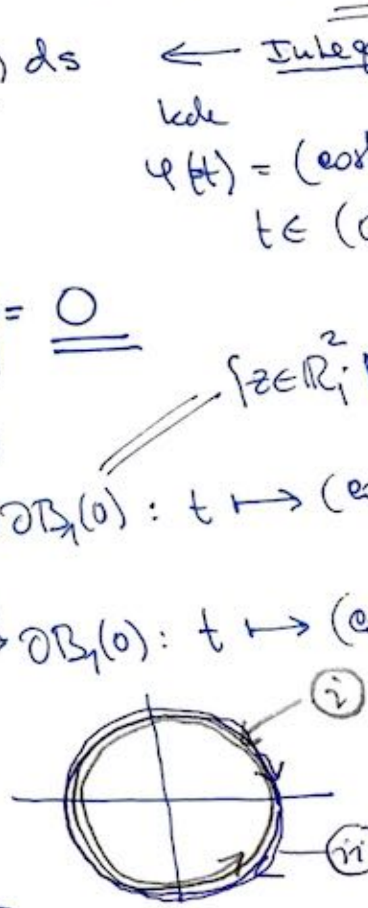
(3) $I := \int_{\langle\varphi\rangle} x\,dy - y\,dx = \int_{\langle\varphi\rangle}(-y,x)\cdot(dx,dy)$

kde $\varphi(t) := \begin{cases} (i)\ (0,2k\pi) \xrightarrow{\text{na}} \partial B_1(0) : t\mapsto(\cos t,\sin t) \\ (ii)\ (0,2k\pi) \xrightarrow{\text{na}} \partial B_1(0) : t\mapsto(\cos t,-\sin t)\end{cases}$

$\{z\in\mathbb{R}^2;\ |z|=1\}$

jsou regulární křivky

$\varphi'(t) = (-\sin t, \pm\cos t) \neq 0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$



(i) $$I = \int_0^{2k\pi}(-\sin t,\cos t)\cdot(-\sin t,\cos t)\,dt = 2k\pi$$

(ii) $$I = \int_0^{2k\pi}(+\sin t,\cos t)\cdot(-\sin t,-\cos t)\,dt = -\int_0^{2k\pi} dt = \underline{\underline{-2k\pi}}$$

Poznámka: $\frac{1}{2\pi} I = k$ udává počet oběhnutí: je-li $k\in\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$ pak při oběhnutí proti směru hodinových ručiček (kladný směr)

je-li $k\in\mathbb{Z}_-$, pak jde o oběhnutí po směru hodinových ručiček (záporný směr)

Věta o potenciálu Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ spojitá takové, že

$$\exists\, U : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tak, že } \boxed{\vec{f} = \nabla U \text{ v } \Omega}$$

$\vec{f}$ má v Ω potenciál

Pak pro $\forall$ regulární křivku φ takovou, že $\langle \varphi \rangle \subset \Omega$:

$$\int_{\langle \varphi \rangle} \vec{f} \cdot \vec{ds} = U(\varphi(b)) - U(\varphi(a))$$

Dk) Dle definice

$$\int_{\langle \varphi \rangle} \vec{f} \cdot \vec{ds} = \int_a^b \vec{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

definice $\bullet$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^d f_i(\varphi(t))\, \varphi_i'(t)\, dt$$

$\exists U$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^d \frac{\partial U}{\partial y_i}(\varphi(t))\, \varphi_i'(t)\, dt$$

řetízkové pravidlo

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} U(\varphi(t))\, dt$$

Newtonův vzorec

$$= U(\varphi(b)) - U(\varphi(a)). \qquad \blacksquare$$

<u>Důsledek</u> Za předpokladů <u>Věty o potenciálu</u>, pro φ uzavřenou platí:

$$\int_{\langle \varphi \rangle} \vec{f} \cdot \vec{ds} = 0.$$

Otázka: Kdy k danému vektorovému poli $\vec{f}$ existuje potenciál U?

George Green

Tvrzení 1 (Nutná podmínka existence potenciálu)

Buď $\vec{f} \in [C^1(\Omega)]^d$ a nechť U je potenciál $\vec{f}$, tzn. $f_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}$, $i = 1, \dots, d$

Pak (nutně): $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, d$

$$(\ast)\quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \iff \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \iff \operatorname{curl} \vec{f} = 0$$

$$(d=2)\quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

$$(d=3)\quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}, \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)$$

Dk Protože $\vec{f} \in [C^1(\Omega)]^d = \underbrace{C^1(\Omega) \times \dots \times C^1(\Omega)}_{d\text{-krát}}$ a $\vec{f} = \nabla U$

tak $U \in C^2(\Omega)$. Ale pak

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \boxed{\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j}} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x),$$ což jsme chtěli dokázat.

Ukazuje se, že podmínka $(\ast)$ je v mnoha situacích postačující.

Tvrzení 2 Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ otevřená a jednoduše souvislá (tzn. že $\forall$ Jordanova křivka φ s $\langle \varphi \rangle \subset \Omega$ lze dá spojitě stáhnout v Ω do bodu.) a pokud $\vec{f} \in [C^1(\Omega)]^2$ splňuje $\operatorname{curl} \vec{f} = 0$ v Ω, pak $\vec{f}$ má v Ω potenciál.

Tvrzení 3 Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ otevřená, konvexní (s každými 2 body z Ω tam patří úsečka, která je spojuje) a pokud $f \in [C^1(\Omega)]^3$ splňuje $\operatorname{curl} \vec{f} = 0$ v Ω, pak má f v Ω potenciál.

Příklad (který ukazuje, že podmínka curl $\vec f = 0$ nemusí vždy stačit na existenci potenciálu)

Buď $\vec f(x,y) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ definované v $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Pak $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$

Ale $\vec f$ nemá potenciál.
Kdyby existoval U tak, že $\vec f = \nabla U$, pak dle věty o potenciálu

$\int_{\langle\varphi\rangle} \vec f \cdot d\vec s = 0$ pro $\varphi(t) : (\cos t, \sin t)$ $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
(uzavřená, regulární C^∞-křivka)

Ale $\int_{\langle\varphi\rangle} \vec f \cdot d\vec s = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{(\vec f \circ \varphi)(t)} \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt = 2\pi$ ↯

PLOŠNÝ INTEGRÁL

Def. Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}^3$ je regulární plocha

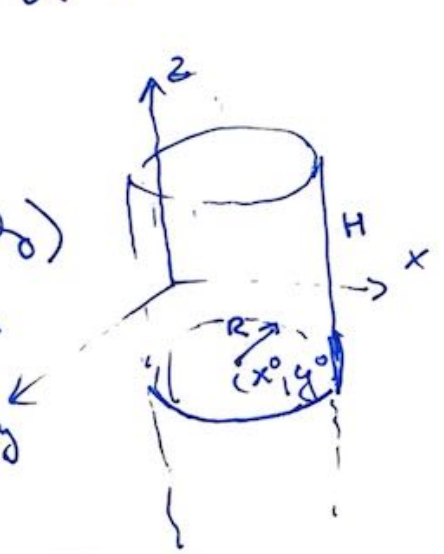
$\overset{\text{df.}}{\equiv}$ $\exists$ zobrazení $\varphi : \underbrace{(a,b) \times (\alpha,\beta)}_{I \subset \mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tak, že

- $\varphi(I) = S$
- $\varphi \in C^1(I)$
- φ je prosté
- $D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{pmatrix}$ má hodnost 2

$$D\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \vec t(x,y) \\ \vec r(x,y) \end{pmatrix}$$

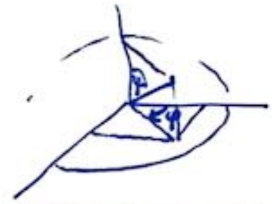
Příklad
- Cylindrické souřadnice (popis válcové plochy)

$$\varphi : \begin{array}{l} x = x^0 + R\cos\psi \\ y = y^0 + R\sin\psi \\ z = z \end{array} : \underset{\psi}{(0,2\pi)} \times (0,H) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$



$$\bullet\quad \left.\begin{aligned} &\varphi_1 : \underset{(0,1)\times(0,2\pi)}{(\rho,\alpha)} \longmapsto (\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha, \sqrt{1-\rho^2}) \\ &\varphi_2 : \underset{(0,\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi)}{(\psi,\varphi)} \longmapsto (\cos\varphi\sin\psi, \sin\varphi\sin\psi, \cos\psi) \end{aligned}\right\} \text{severní hemisféra}$$

Máme dvě různé parametrizace stejné plochy.

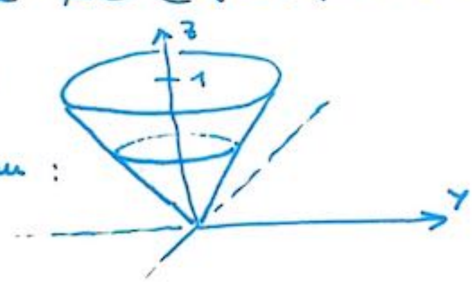


PŘIPOMENUTÍ:

(Př. 1) Spočítejte obsah kuželové plochy parametrizované

$$\varphi : \underset{(0,2\pi)\times(0,1)}{(u,z)} \longmapsto (z\cos u, z\sin u, z) \quad \text{kde } u\in(0,2\pi),\ z\in(0,1)$$

viz obrázek:



Řešení: Vektory generující tečnou rovinu:

$$\vec{t} = \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} = (-z\sin u, z\cos u, 0)$$

$$\vec{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = (\cos u, \sin u, 1)$$

Tedy Gramova matice má tvar

$$G = \begin{pmatrix} \vec{t}\cdot\vec{t} & \vec{t}\cdot\vec{r} \\ \vec{r}\cdot\vec{t} & \vec{r}\cdot\vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det G = |\vec{t}\times\vec{r}|^2 = 2z^2$$

$$z\in(0,1)$$

Tak

$$|S| = \int_S dS = \int_0^1\int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{2}\,z}_{\sqrt{\det G}}\,du\,dz = \underline{\underline{\sqrt{2}\,\pi}}$$

Definice Buď $S\subset\mathbb{R}^3$ regulární plocha parametrizovaná parametrizací $\varphi : \underset{\ni (u,v)}{I} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Pak

I. DRUHU
$$\int_S f\,dS \overset{\text{df.}}{=} \int_I f(\varphi(u,v))\,|\vec{t}(u,v)\times\vec{r}(u,v)|\,du\,dv$$
takový má integrál vpravo smysl

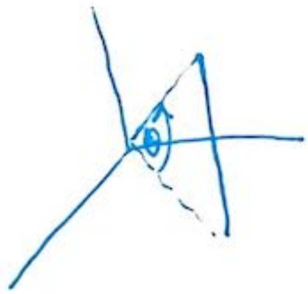
II. DRUHU
$$\int_S \vec{f}\cdot d\vec{S} \overset{\text{df.}}{=} \int_S \vec{f}\cdot\vec{n}\,dS = \int_I \vec{f}(\varphi(u,v))\cdot\left(\vec{t}(u,v)\times\vec{r}(u,v)\right)du\,dv$$
pokud integrál vpravo existuje

$\boxed{\text{Př. 2}}$ Spočítejte $I = \int_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$ kde S je sféra o poloměru 1.

Řešení
Počítáme $I = \int_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \underbrace{\vec{n}(x,y,z)}_{(\vec{t}\times\vec{r})(x,y,z)}\,dS$, kde $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$

Parametrizace

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \cos\theta\cos\varphi \\ y &= \cos\theta\sin\varphi \\ z &= \sin\theta \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &\varphi \in (0, 2\pi) \\ &\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$



Pak

$$\vec{t} = (-\cos\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\cos\varphi,\ 0)$$
$$\vec{r} = (-\sin\theta\cos\varphi,\ -\sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

Pak $\vec{t}\times\vec{r} = (\cos^2\theta\cos\varphi,\ \cos^2\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\theta)$

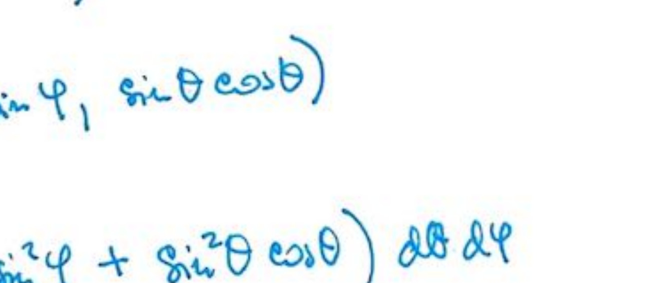
a tedy

$$I = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\underbrace{\cos^3\theta\cos^2\varphi + \cos^3\theta\sin^2\varphi}_{\cos^3\theta} + \sin^2\theta\cos\theta\Big)\,d\theta\,d\varphi$$

$$= 2\pi\int_{-\pi/2}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = \underline{\underline{4\pi}}$$

Př. 3 Obecnější situace: uvažujme plochu danou jako graf funkce $(x,y)\in I \longmapsto z(x,y)$. Tato plocha je parametrizována

$\varphi: (x,y) \longmapsto (x,y,z(x,y))$



Pak obsah plochy:

$$\int_S dS = \int_I \left|(\vec{t}\times\vec{r})(x,y)\right|\,dx\,dy =$$

$$= \int_I \sqrt{1+|\nabla z|^2}\,dx\,dy \quad \text{... funkcionál plochy}$$

neboť $\vec{t} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$ a $\vec{t}\times\vec{r} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$

$\vec{r} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ což dává $|\vec{t}\times\vec{r}| = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$

Nyní se zaměříme na klasifikaci parametrizací ploch. Tuto část lze provést pro regulární plochy S dimenze k v prostoru $\mathbb{R}^d$.

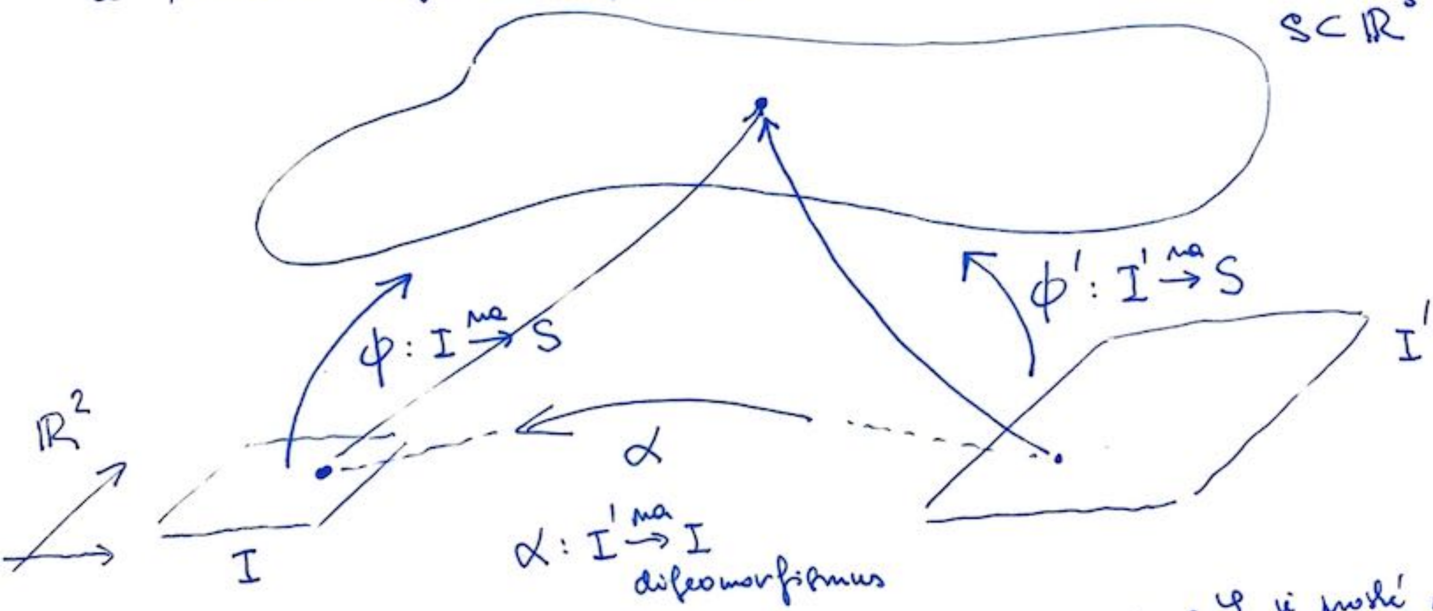
$\boxed{\text{Def.}}$ Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}^d$ je <u>regulární plocha dimenze k</u>

$\overset{df}{\equiv}$ $\exists\, I \subseteq \mathbb{R}^k$ interval $((a_1,b_1)\times\dots\times(a_k,b_k))$ a $\exists\, \Phi : I \to \mathbb{R}^d$ tak, že

- ϕ je hladké zobrazení $\left(\phi \in C^1(I) \text{ nebo } \phi \in C^\infty(I)\right)$
- $\phi(I) = S$
- ϕ je prosté
- $$\frac{\partial(\phi_1,\dots,\phi_d)}{\partial(u_1,\dots,u_k)}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial\phi_d}{\partial u_1} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial u_k} & \dots & \frac{\partial\phi_d}{\partial u_k} \end{pmatrix}(u)$$ matice $(k \times d)$.

  má hodnost $\underline{k}$ v I

Uvažujme dvě regulární parametrizace stejné plochy S, viz obrázek a následná definice difeomorfismu.



<u>Def.</u> Řekneme, že $\alpha : I' \xrightarrow{na} I$ je <u>difeomorfismus</u> $\overset{def}{\equiv}$ $\begin{cases} \varphi \text{ je } \underline{\text{prosté}} \text{ na } I' \\ \varphi \text{ zobrazí } I' \ \underline{\text{NA}}\ I \\ \varphi \text{ je hladké } (C^1) \\ \varphi^{-1} \text{ je hladké } (C^1) \end{cases}$

Def. • Dvě parametrizace ϕ, ϕ' plochy S jsou souhlasně orientované
$[\phi : I \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d, \phi' : I' \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d, \phi(I) = S, \phi(I') = S]$
$\overset{df}{\equiv} \exists\, \alpha : I' \to I$ difeomorfismus tak, že $\boxed{\phi' = \phi \circ \alpha}$
a $\boxed{\det J_\alpha > 0}$ v I'

kde $J_\alpha = \dfrac{\partial(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}{\partial(u'_1, \dots, u'_k)}$

• Pokud $\exists\, \alpha : I' \to I$ difeomorfismus tak, že $\boxed{\phi' = \phi \circ \alpha}$ a $\boxed{\det J_\alpha < 0 \text{ v } I'}$, pak ϕ, ϕ' jsou nesouhlasně orientované

Příklad Buď S jednotková sféra a ϕ, ϕ' dvě její parametrizace:
$\phi(t, \theta) = (\cos t \cos\theta, \sin t \cos\theta, \sin\theta) : \underbrace{(0, 2\pi) \times (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})}_{I} \to \mathbb{R}^3$
$\phi'(t, \theta) := \phi(\theta, t) = (\cos\theta \cos t, \cos\theta \sin t, \sin\theta) : \underbrace{(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)}_{I'} \to \mathbb{R}^3$

Pak $\alpha : I' \xrightarrow{\text{na}} I : (t, \theta) \mapsto (\theta, t)$
Pak $\phi'(t, \theta) = (\phi \circ \alpha)(t, \theta) = \phi(\alpha(t, \theta)) = \phi(\theta, t)$,
a $\det J_\alpha = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ v I'

Tedy ϕ, ϕ' jsou nesouhlasně orientované

Tvrzení Existují právě dvě třídy ekvivalence parametrizací regulárních ploch dimenze k.

(Dk) Je založen na existenci (konstrukci) difeomorfismu zobrazující interval v $\mathbb{R}^k$ na interval v $\mathbb{R}^k$. Protože $\alpha, \alpha^{-1} \in C^\infty$ (resp. C^1) tak, že $\alpha \circ \alpha^{-1} = I \Rightarrow (\det J_\alpha)(\det J_{\alpha^{-1}}) = 1 \Rightarrow \det J_\alpha \neq 0$ všude.

Def. • S je orientovaná plocha $\overset{df}{\equiv}$ • S je regulární plocha dimenze k
• S je opatřena jednou třídou ekvivalentních parametrizací

• Jakékoliv 2 parametrizace ϕ, ϕ' z této třídy jsou souhlasně orientované, píšeme $\boxed{\phi \sim \phi'}$.

• Je-li S orientovaná plocha, pak $-S$ nebo $\ominus S$ označuje tutéž plochu opatřenou druhou třídou ekvivalentních parametrizací.

Věta (závislost/nezávislost plošných integrálů na parametrizaci)

Jsou-li $\phi \sim \phi'$ (resp. $\phi \not\sim \phi'$) dvě parametrizace reg. plochy S.

Pak • $\int\limits_{\Phi(I)=S} \vec{f}\cdot\vec{dS} = \int\limits_{\phi'(I')=S} \vec{f}\cdot\vec{dS}$ $\left(\text{resp. } \int\limits_{\phi(I)=S} \vec{f}\cdot\vec{dS} = -\int\limits_{\phi'(I')=S} \vec{f}\cdot\vec{dS}\right)$

• $\int\limits_S f\,dS$ nezávisí na volbě parametrizace.

(Dk) Je založen (1) na vztahu ϕ, ϕ':

$$\boxed{\underset{\text{na } I'}{\phi'} = \underbrace{(\phi \circ \alpha)}_{\text{difeomorfizmus}} \text{ na } I'}$$

a vlastnostech ϕ, ϕ' a α

(2) na větě o substituci.

Ukažeme jen pro křivkový integrál:

$$\int\limits_{\langle\phi'\rangle} \vec{f}\cdot\vec{dS} = \int_{a'}^{b'} \vec{f}(\phi(t))\cdot\phi'(t')\,dt' \overset{\phi'=\phi\circ\alpha}{=} \qquad ' = \frac{d}{dt'}$$

$$= \int_{a'}^{b'} \vec{f}\left(\phi(\alpha(t'))\right)\cdot\left[\phi\left(\alpha(t')\right)\right]'dt'$$

$$= \int_{a'}^{b'} \vec{f}\left(\vec{\phi}(\alpha(t'))\right)\cdot\phi'(\alpha(t'))\,\alpha'(t')\,dt' \qquad \frac{d}{dt}$$

substituce $t = \alpha(t')$; je-li α rostoucí ⇓

$$= \int_a^b \vec{f}(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} a' &= \alpha(a) \\ b' &= \alpha(b) \end{aligned}}$$

V případě, že α je klesající, pak $a' = \alpha(b)$, $b' = \alpha(a)$ a dojde k obrácení znaménka u posledního integrálu.

$$\int\limits_{\langle\phi'\rangle} f\,dS = \int_{a'}^{b'} f(\phi'(t'))\,|\phi'(t')|\,dt' = \int_{a'}^{b'} f\left(\phi(\alpha(t'))\right)\left|\frac{d}{dt'}\left[\phi(\alpha(t'))\right]\right|dt'$$

$$= \int_{a'}^{b'} f\left(\phi(\alpha(t'))\right)\left|\frac{d\phi}{dt}(\alpha(t'))\,\alpha'(t')\right|dt'$$

$$= \int_{a'}^{b'} f\left(\phi(\alpha(t'))\right)\left|\phi'(\alpha(t'))\right|\,|\alpha'(t')|\,dt' \overset{\text{substituce}}{=} \int_a^b f(\phi(t))\,|\phi'(t)|\,dt = \int\limits_{\langle\phi\rangle} f\,dS. \quad \square$$

Nyní si uvedeme tři tvrzení, která zobecňují Newtonův vzorec

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

integrál z derivace přes „objem"   hodnota funkce na hranici

$\boxed{v\ \mathbb{R}^2}$ body   interval / křivka   2d-množina

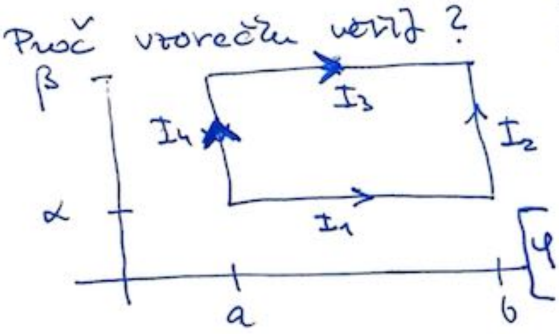
$\underbrace{\text{body} \quad \text{interval/křivka}}_{\text{řeší Věta o potenciálu}}$ $\qquad \underbrace{\text{křivka} \quad \text{2d-množina}}_{\text{řeší Greenova věta}}$

Tvrzení (Greenova věta) Buď $\underset{(\text{měřitelná})}{\Omega \subset \mathbb{R}^2}$ taková, že $\partial\Omega$ je regulární křivka. Pak, pro $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{curl}\vec{f}\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega}\vec{f}\cdot\vec{ds}}$$

Proč vzoreček platí?

Uvažujme speciálně $\Omega=(a,b)\times(\alpha,\beta)$, viz obrázek. Části $\partial\Omega$ jsou parametrizovány takto:



φ:	I_1:	$s\in(a,b)\mapsto(s,\alpha) \Rightarrow \varphi'(s)=(1,0)$
	I_2:	$s\in(\alpha,\beta)\mapsto(b,s) \Rightarrow \varphi'(s)=(0,1)$
	I_3:	$s\in(a,b)\mapsto(s,\beta) \Rightarrow \varphi'(s)=(1,0)$
	I_4:	$s\in(\alpha,\beta)\mapsto(a,s) \Rightarrow \varphi'(s)=(0,1)$

Pak

$$\int_{\partial\Omega}\vec{f}\cdot\vec{ds} = \int_{I_1+I_2-I_3-I_4}\vec{f}\cdot\vec{ds} = \int_{I_1}\cdots+\int_{I_2}\cdots-\int_{I_3}\cdots-\int_{I_4}\cdots =$$

$$= \int_a^b f_1(s,\alpha)\,ds + \int_\alpha^\beta f_2(b,s)\,ds - \int_a^b f_1(s,\beta)\,ds - \int_\alpha^\beta f_2(a,s)\,ds$$

$$= -\int_a^b \left[f_1(s,\beta)-f_1(s,\alpha)\right]ds + \int_\alpha^\beta f_2(b,s)-f_2(a,s)\,ds$$

$$= \int_\alpha^\beta\int_a^b \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\tau,s)\,d\tau\,ds - \int_a^b\int_\alpha^\beta \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(s,\xi)\,d\xi\,ds$$

$$= \int_\Omega\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)(x,y)\,dx\,dy = \int_\Omega(\operatorname{curl}\vec{f})(x,y)\,dx\,dy.$$

$\boxed{v\ \mathbb{R}^3}$ body – křivky – plochy – množiny

věta o potenciálu (body – křivky)

Stokesova věta (křivky – plochy)

Gaussova věta (plochy – množiny)

Tvrzení (Stokesova věta) Buď $G \subset \mathbb{R}^3$ regulární plocha dimenze 2 s hranicí ∂G, která tvoří regulární křivku v $\mathbb{R}^3$. Pak pro $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\int_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{ds}}_{\text{křivkový } \int \text{ 2. druhu}} = \underbrace{\int_G \operatorname{curl} \vec{F} \cdot \vec{dS}}_{\text{plošný integrál 2. druhu}}$$

Proč užitečné? Speciální případy když G je obdélník v rovinách (x,y), (x,z) a (y,z) vede na Greenovu větu v „2D".

Tvrzení (Gaussova věta) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ omezená a její hranice $\partial\Omega$ nechť je regulární plocha.

Pak pro $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ platí

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz}$$

Proč užitečné? Newtonův vzorec pro kvádr

Otázky ① Dají se věty (věta o potenciálu, Green, Stokes, Gauss) nahlédnout jako důsledek jediné formule a zobecnit do více dimenzí

② Jak zobecnit plošný integrál II. druhu do více dimenzí?

Pro plošný integrál I. druhu a $S \subset \mathbb{R}^d$ regulární plocha dimenze k máme

$$\int_S f\, dS \overset{\text{def.}}{=} \int_I f(\varphi(u)) \sqrt{\det \mathbb{G}(u)}\, du$$

$u = (u_1, \dots, u_k)$ $\quad \mathbb{G}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_d}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_k}, \dots, \frac{\partial \varphi_d}{\partial u_k} \end{pmatrix}$

Důležité důsledky Gaussovy věty

(1) $\vec{F} = (0, \dots, 0, g, 0, \dots, 0)$ $\Rightarrow$ $$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} g n_i\, dS}$$, kde

$\uparrow$ i-té místo

n_i ... i-tá složka vnější normály $\vec{n}$.

Speciálně pro $g = uv$

Integrace per-partes pro funkce více proměnných

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v\, dx = \int_{\partial\Omega} u v n_i\, dS - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx}$$

$u, v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

---

(2) $$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_\Omega \mathrm{div}(\underbrace{\nabla u}_{\vec{F}})\, dx \overset{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \vec{n}\, dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dS$$

Zobecnění (jiné formy integrace per-partes)

$$\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = \int_\Omega \mathrm{div}(\nabla u)\, v\, dx = \int_\Omega \mathrm{div}(v \nabla u) - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

$$\overset{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n\, dS - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

$$= \int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial n}\, dS - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

Aplikace Najděte Euler-Lagrangeovy rovnice odpovídající funkcionálu

$$\Phi[u] = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u\, dx - \int_{\partial\Omega} g u\, dS$$

kde $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ jsou dané fce.

Dirichletův integrál